

Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

K. P. Belyaev, A. A. Kuleshov, N. P. Tuchkova, C. A. S. Tanajura, Method of dynamic model results correction by observational data and its application in oceanography, *Matem. Mod.*, 2015, Volume 27, Number 12, 20–32

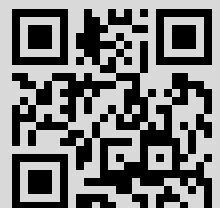
Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 200.128.60.80

January 9, 2017, 21:40:38



## МЕТОД КОРРЕКЦИИ РАСЧЕТОВ ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДАННЫМИ НАБЛЮДЕНИЙ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ В ОКЕАНОЛОГИИ

© 2015 г. *К.П. Беляев<sup>1,2,4</sup>, А.А. Кулешов<sup>3</sup>, Н.П. Тучкова<sup>2</sup>, К.А. Танажура<sup>4</sup>*

<sup>1</sup> Институт океанологии им. П.П. Ширшова РАН, Москва, Россия

<sup>2</sup> Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН, Москва, Россия

<sup>3</sup> Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия

<sup>4</sup> Федеральный университет штата Байя, г. Сальдор, Бразилия

Теоретическая часть работы – разработка нового метода усвоения данных наблюдений для коррекции модельных расчетов (раздел 2) выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда (РНФ), проект № 14-11-00434. Прикладная часть работы – численные эксперименты по моделированию динамики Атлантического океана (раздел 3) выполнена при поддержке гранта РФФИ, проект № 14-05-00363.

Разрабатывается и применяется новый метод усвоения данных наблюдений для коррекции модельных расчетов. Метод основан на принципе наименьшего действия и использует теорию диффузионных случайных процессов и стохастических дифференциальных уравнений. Для применения разрабатываемого метода требуется решить систему линейных уравнений, которая выводится в данной работе из принципа наименьшего действия. Эта система может рассматриваться как вариант уравнений фильтра Калмана, учитывающий динамику модели.

Метод применяется в численных экспериментах с динамической моделью циркуляции океана HYCOM и данными наблюдений за уровнем океана архива AVISO в Атлантическом океане. По результатам расчетов проводится анализ качества применяемого метода. Результаты расчетов с коррекцией сравниваются с контрольным расчетом модели без коррекции, и делается вывод об адекватности и состоятельности предложенного метода.

Ключевые слова: методы усвоения данных наблюдений, принцип наименьшего действия, динамические модели циркуляции океана.

## METHOD OF DYNAMIC MODEL RESULTS CORRECTION BY OBSERVATIONAL DATA AND ITS APPLICATION IN OCEANOGRAPHY

*K.P. Belyaev<sup>1,2,4</sup>, A.A. Kuleshov<sup>3</sup>, N.P. Tuchkova<sup>2</sup>, C.A.S. Tanajura<sup>4</sup>*

<sup>1</sup> Shirshov Institute of Oceanology of Russian Academy of Science

<sup>2</sup> Dorodnitsyn Computer Center of Russian Academy of Science

<sup>3</sup> Keldysh Institute of Applied Mathematics of Russian Academy of Science

<sup>4</sup> Federal University of Bahia, Brazil

New method of data assimilation for the correction of model computations is developed and applied. The method is based on the path of least resistance principle and uses the theory of diffusion stochastic processes and stochastic differential equations. Derived from this principle the system of linear equations is needed to be solved to apply this method. This system may be con-

sidered as a generalization of the known Kalman scheme when dynamics of the model is taken into account.

The method is applied to numerical experiments in conjunction with model circulation HYCOM and satellite sea level observational data from archive AVISO for Atlantic. The skill of the method is assessed using the results of the experiments. The model output is compared with twin experiments, namely the model calculation without assimilation and one comes to the conclusion that the proposed method is consistent and robust.

Key words: data assimilation methods, path of least resistance principle, ocean dynamics models.

## 1. Введение

Методы усвоения данных наблюдений в гидродинамических моделях циркуляции атмосферы и океана представляют собой одно из наиболее интересных и быстро развивающихся направлений в современной вычислительной геофизике. Основная идея данного направления – оптимальным образом совместить полученные в результате модельных расчетов поля геофизических характеристик, таких как температура, соленость, давление, поля скоростей течений и ряд других, с данными измерений, получаемых независимо от модели. В результате такого совмещения строятся новые поля характеристик, более пригодные для последующего анализа и/или прогноза.

Задачи усвоения данных наблюдений (data assimilation techniques) актуальны для современной океанологии, метеорологии при прогнозах погоды или в климатологии при прогнозах изменения климата. Научные статьи по данному направлению обширно представлены в [1-6]. Качество и полезность предлагаемых и используемых методов усвоения можно оценить, сравнивая прогностические величины после усвоения с контрольным расчетом (без усвоения) и с данными натурных наблюдений в заданной априори метрике. Если прогноз предпочтительнее после усвоения, чем без него, метод усвоения имеет право на применение в оперативной практике. Кроме того, методы усвоения можно сравнивать между собой по различным критериям, например, по требованиям к реализации на ЭВМ, оперативным возможностям, вычислительным затратам и многим другим характеристикам.

Несмотря на тот факт, что исследования в области усвоения данных продолжаются уже более 50 лет, до окончательного решения проблемы, то есть до создания алгоритма, который был бы признан наилучшим, еще далеко. Бывает так, что хорошо обоснованный численный алгоритм по точности прогноза проигрывает более простому эмпирическому методу.

Математические методы усвоения можно разделить на две основные группы. Первая группа основана на минимизации заданного функционала, описывающего в соответствующей метрике расстояние между траекторией модели и данными наблюдений. Как пример, можно привести методы 3D-Var и 4D-Var [7,8]. Вторую группу составляют статистические или динамико-стохастические методы, которые рассматривают данную задачу как проблему выделения сигнала на фоне шума и применяют известные методы статистического оценивания и/или фильтрации [9-11]. Существуют также гибридные методы усвоения, в которых эти два подхода так или иначе объединяются [12,13].

При усвоении данных по методам 3D-Var и 4D-Var меняется начальное условие – начальное поле параметров, так что траектория численного решения проходит от на-

блюдений на наименьшем в смысле заданной метрики расстоянии. Таким образом, изменения происходят не локально, а на всей области определения модели. В альтернативном подходе – при усвоении данных по динамико-стохастическим методам определяется весовая матрица, которая учитывает связи между наблюдаемыми и вычисляемыми в модели значениями параметров. При усвоении происходят изменения расчетных параметров в той части сеточной области, где эти связи наиболее существенны, и они определяются корреляцией между расчетными и наблюдаемыми величинами на момент усвоения, то есть эти изменения сильно локализованы и не зависят от предыдущего состояния системы, а это значит, что теряется информация об эволюции процесса. Однако реализация динамико-стохастических методов проще, чем методов 3D-Var и 4D-Var.

В данной работе предлагается гибридный метод усвоения. В нем, как и в динамико-стохастических схемах, рассчитывается весовая матрица, но при этом матрица зависит не только от корреляции наблюдаемых и расчетных характеристик модели на данный момент времени, но и от предыдущего состояния. Сама эта матрица определяется из принципа наименьшего действия, как и в методах 3D-Var и 4D-Var. Еще одной особенностью предлагаемого метода является тот факт, что функционал минимума действия строится естественным образом как некоторый предельный процесс в данной задаче.

В настоящей работе в качестве основной модели, в которой производится усвоение данных, использовалась модель HYCOM (HYbrid Coordinate Ocean Model) [14,15], ее версия 2.2.14, сконфигурированная для Атлантики в координатной области от 79°ю.ш. до 55°с.ш. и от 100°з.д. до 20°в.д., за исключением Средиземного моря. Подробнее о модели написано ниже. В экспериментах также использовался архив AVISO (Archiving, Validating and Interpolating Satellite Ocean data, данные которого доступны на сайте [www.aviso.altimetry.fr](http://www.aviso.altimetry.fr)). Работа продолжает исследования, ранее опубликованные в ряде статей авторов [11,12,16].

Основная цель и содержание данной работы состоят в следующем:

- а) разработать, обосновать и реализовать новый метод усвоения данных;
- б) продемонстрировать его реалистичность, конкурентоспособность и возможность применения для усвоения данных спутниковых наблюдений;
- в) изучить влияние усвоения данных спутниковых наблюдений по данному методу на другие расчетные величины модели;
- г) провести краткий анализ физической структуры модельных полей до и после усвоения и сравнить с наблюдениями.

## 2. Математическая формулировка задачи

Пусть в некоторой сеточной области задана математическая модель циркуляции океана, которая интегрируется на интервале  $[0, T]$  и пусть  $X$  обозначает вектор состояния океана, который включает потенциальную температуру океана ( $\theta$ ), соленость ( $S$ ), уровень поверхности океана (SSH (sea surface height)) и другие величины. Число точек сетки обозначим как  $N_g$ , число переменных в модели –  $N_{mv}$ . Таким образом, размерность вектора состояний  $X$  будет  $N_g \times N_{mv} = r$ . Далее, обозначим через  $Y$  вектор наблюдаемых параметров, через  $N_o$  – число наблюдений, каждое из которых имеет  $N_{ov}$  независимых переменных, например,  $\theta$ , и аномалии уровня поверхности океана (SSHA – разность между уровнем поверхности океана (SSH) и средним многолетним значением в тех же точ-

ках). Тогда размерность вектора наблюдений будет  $N_o \times N_{ov} = N$ . Обычно  $N_{mv} \geq N_{ov}$ , поскольку наблюдается только часть переменных из тех, что рассчитываются в модели. Как принято в теории усвоения данных, рассматриваются два вектора параметров океана, до и после усвоения (background and analysis states)  $X_b, X_a$  соответственно. Они связаны соотношением

$$X_a = X_b + K(Y - HX_b). \quad (1)$$

В формуле (1) матрица  $K$  имеет специальное название – весовая матрица Калмана (Kalman gain). Ее размерность будет  $r \times N$ . Матрица  $H$  размерности  $N \times r$  представляет собой матрицу оператора, который проектирует пространство модели в пространство наблюдений. Фактически при этом обнуляются ненаблюдаемые компоненты вектора  $X$  и производится линейная интерполяция наблюдаемых компонент этого вектора в точки наблюдения.

Далее, на промежутке времени  $[0, T]$  вводится дискретизация  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$ ,  $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ , и в моменты времени  $t_n$  происходит усвоение данных по формуле (1). Таким образом, в каждый момент времени  $t_n$  имеется равенство

$$X_{a,n} = X_{b,n} + K_n(Y_n - HX_{b,n}). \quad (2)$$

Пусть модельный прогноз с предыдущего состояния (background state) обозначается как  $X_{b,n+1} = F(X_{a,n})$ . Тогда уравнение (2) будет иметь вид

$$X_{a,n+1} = F(X_{a,n}) + K_{n+1}(Y_{n+1} - HF(X_{a,n})). \quad (3)$$

Пусть модельный прогноз  $F(x)$  представлен в виде первообразной для некоторой функции  $\Lambda$

$$F(x) = x + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \Lambda(x_n, \tau) d\tau, \quad (4)$$

тогда уравнение (3) имеет вид

$$X_{a,n+1} = X_{a,n} + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \Lambda(X_{a,n}, \tau) d\tau + K_{n+1} \left( Y_{n+1} - HX_{a,n} - H \int_{t_n}^{t_{n+1}} \Lambda(X_{a,n}, \tau) d\tau \right). \quad (5)$$

Уравнение (5) записывается для полей после усвоения, поэтому индекс  $a$  в последующем будем опускать.

В ряде предыдущих работ авторов [11,17] было показано, что при определенных условиях последовательность таких процессов может быть аппроксимирована стохастическим диффузионным процессом следующего вида:

$$dX(t) = (I + KH)\Lambda dt + (KQK')dW, \quad (6)$$

где  $I$  – единичная матрица,  $Q = E(Y - HX)(Y - HX)' + R$  – сумма ковариационной матрицы ошибки моделирования и ковариационной матрицы инструментальной ошибки наблюдений ( $R$ ). Через символ  $'$  обозначается транспонирование вектора или матрицы. Матрица  $R$  предполагается диагональной, т.е. значения инструментальных ошибок не коррелированы между собой. В уравнении (6) также использовано стандартное обозначение гауссова «белого шума»  $dW$ . Момент времени  $t$  принадлежит интервалу  $t_n < t < t_{n+1}$ . В дальнейшем все индексы опускаются, если это не приводит к неопределенностям. Как обычно, модель предполагается несмещенной относительно наблюдений, то есть  $E(Y - HX) = 0$ , где символ  $E$  обозначает вероятностное среднее, или в физическом смысле – усреднение по ансамблю, таким образом, среднее отклонение наблюдений от результатов моделирования равно нулю.

Как видно из (6), процесс  $X(t)$  определен во всех точках сетки и для всех модельных переменных. Без ограничения общности можно считать, что матрицы  $KH$  и  $Q$  обратимы, то есть существуют матрицы  $(KH)^{-1}$  и  $Q^{-1}$ . Эти условия означают, что как наблюдаемые, так и модельные переменные не выражаются линейно одни через другие. Проблему оптимального усвоения можно сформулировать следующим образом: найти такую весовую матрицу  $K$ , для которой достигается минимум дисперсии процесса  $X(t)$  при заданном значении его тренда, то есть найти минимум матрицы  $KQK'$  в смысле любой из матричных норм при заданном значении вектора  $(I + KH)\Lambda$ , равном  $C$ . В соответствии с данной формулировкой вектор  $C$  – это  $r$ -мерный вектор, заданный во всех точках сетки и имеющий определенное значение для каждой из модельных переменных.

Перед формальным решением данной задачи имеет смысл сделать краткий физический анализ искомого решения. Во-первых, соотношение (6) – это дифференциальное соотношение, откуда следует, что искомое решение как для малого интервала  $(t, t + \Delta t)$ , так и для интервала  $(t, T)$  будет зависеть от начального условия в момент  $t$ , если  $X(t) = x$ . Следовательно, матрица  $Q$  и вектор  $C$  должны быть заданы зависящими от состояния  $x$ . Во-вторых, очевидно, при  $C = \Lambda(x, t)$  единственным решением будет тривиальное решение  $K = 0$ , что физически разумно. Однако, если  $C \neq \Lambda(x, t)$ , решение всегда существует и оно не будет тривиальным, так как  $\Lambda(x, t) = (KH)^{-1}(C - \Lambda(x, t))$ . Более того, если  $C$  сильно отличается от  $\Lambda(x, t)$ , то  $K$  окажется очень большим и процесс  $X(t)$  из (6) может иметь очень большую диффузию, что в конечном случае приведет к нереалистичному решению.

Для математического решения данной оптимизационной задачи в соответствии с теорией условных экстремумов [18] составляется следующий функционал Лагранжа:

$$L(K, \varphi) = KQK' + [(I + KH)\Lambda(x, t) - C]\varphi, \quad (7)$$

где  $\varphi$  – вспомогательный неизвестный  $r$ -мерный вектор-строка, так называемый вектор множителей Лагранжа. Рассмотрим вариацию функционала (7)

$$\delta L(K, \varphi) = L(K + \delta K, \varphi + \delta \varphi) - L(K, \varphi),$$

$$L(K + \delta K, \varphi + \delta \varphi) = (K + \delta K)Q(K + \delta K)' + [(I + (K + \delta K)H)\Lambda - C](\varphi + \delta \varphi) = KQK' + \\ + \delta KQK' + KQ\delta K' + \delta KQ\delta K' + \delta KH\Lambda\varphi + \delta KH\Lambda\delta\varphi + [(I + KH)\Lambda - C]\varphi + [(I + KH)\Lambda - C]\delta\varphi,$$

отсюда с точностью до членов второго порядка малости получаем

$$\delta L(K, \varphi) = \delta K(QK' + H\Lambda\varphi) + KQ\delta K' + [(I + KH) - C]\delta\varphi.$$

Так как матрицы  $Q$  и  $KQ\delta K'$  симметричны, последнюю приведем к виду

$$KQ\delta K' = (KQ\delta K')' = \delta K''(KQ)' = \delta K(Q'K') = \delta KQK'.$$

Тогда вариация функционала Лагранжа равна

$$\delta L(K, \varphi) = \delta K(2QK' + H\Lambda\varphi) + [(I + KH) - C]\delta\varphi = ((2(QK')' + (H\Lambda\varphi)')\delta K')' + \\ + [(I + KH) - C]\delta\varphi.$$

В итоге имеем

$$\delta L(K, \varphi) = ((2KQ + \varphi'(H\Lambda)')\delta K')' + [(I + KH)\Lambda - C]\delta\varphi. \quad (8)$$

Из принципа минимума действия  $\delta L(K, \varphi) = 0$  следует, что члены при  $\delta K'$  и  $\delta\varphi$  в правой части (8) нужно приравнять нулю

$$KQ + \frac{1}{2}\varphi'(H\Lambda(x, t))' = 0, \quad (9)$$

$$(I + KH)\Lambda(x, t) = C. \quad (10)$$

Уравнения (9), (10) – матричные, они эквивалентны  $(r+1) \times N$  скалярным уравнениям относительно такого же числа неизвестных. Так как матрицы  $KH$  и  $Q$  обратимы, эта система уравнений имеет единственное решение. Это решение может быть получено явным образом. Из уравнения (9) выражаем  $K = -\varphi'(H\Lambda)'Q^{-1}/2$  и, подставляя в (10), находим  $\varphi'$

$$\varphi' = -2(C - \Lambda)[(H\Lambda)'Q^{-1}H\Lambda]^{-1}.$$

Поскольку выражение в квадратных скобках есть просто число, в результате получим окончательное выражение для матрицы  $K$

$$K = \frac{(C - \Lambda)(H\Lambda)'Q^{-1}}{(H\Lambda)'Q^{-1}H\Lambda}. \quad (11)$$

Сокращать  $Q^{-1}$  и  $(H\Lambda)'$  можно только в одномерном случае, когда  $r = N = 1$ . Тогда

(11) трансформируется в тривиальное соотношение  $K = (C - \Lambda) / (H\Lambda)$ . В общем случае видно, что если компонента вектора сноса  $(I + KH)\Lambda$  положительна, то разность  $(Y - HX_b)$  добавляется к модельному прогнозу, а если отрицательна, то эта разность вычитается, что физически обосновано.

Таким образом, решение задачи на  $(n+1)$ -м шаге определяется формулами (3), (11), где вектор  $\Lambda$ , согласно (4), вычисляется как аппроксимация выражения  $t$

$$\Lambda_{n+1} = \frac{F(X_{a,n}) - X_{a,n}}{\Delta t}, \quad C_{n+1} = Y_{n+1} - HX_{a,n},$$

оператор проектирования  $H$  и ковариационная матрица  $Q$  могут определяться по-своему для каждой конкретной задачи. Описание метода полностью завершено.

В предложенном методе при вычислении матрицы  $K$  учитывается динамика модели  $K_{n+1} = K_{n+1}(Y_{n+1}, X_{b,n+1}, X_{a,n})$  в отличие от классического фильтра Калмана [10], где  $K_{n+1} = K_{n+1}(Y_{n+1}, X_{b,n+1})$ .

Большим преимуществом предложенного метода является тот факт, что возможно не только получить оптимальное значение весовой матрицы, и следовательно, решить задачу усвоения, но и получить для него вероятностное распределение отклонения от полученного решения. Это распределение будет находиться как решение уравнения Фоккера-Планка [19]

$$\frac{\partial p(t, x)}{\partial t} = -\frac{\partial[(I + KH)\Lambda p(t, x)]}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2[(KQK')p(t, x)]}{\partial x^2}, \quad (12)$$

где  $p(t, x)$  – плотность распределения вероятности случайного вектора  $X(t)$ . Уравнение (12) решается при начальном условии  $p(t_0, x) = p_0(x)$  и граничном условии  $p(t, \pm\infty) = 0$ , где  $p_0(x)$  – заданная априори функция.

### 3. Численные эксперименты и их результаты

Изложенный выше метод усвоения был применен совместно с численной моделью циркуляции океана НУСОМ [20,21] в ее последней конфигурации, версия 2.2.14 [22]. В данной версии сетка модели расположена в Атлантике в пределах от Антарктиды до 55°с.ш. По горизонтали разрешение модели составляет 0.25° в направлении восток-запад. В направлении юг-север расстояние между узлами сетки варьируется с минимальным разрешением 0.25° между 10°ю.ш. и 10°с.ш. По вертикали данная модель имеет так называемую изопикническую структуру, то есть от поверхности до дна весь океан разбивается на заранее заданные уровни равной плотности (изопикны). В данной конфигурации используется 21 уровень. Разрешение модели по горизонтали составляет 480×760 точек. В модели вычисляется 109 независимых переменных, а именно: уровень океана, 3 баротропные переменные – горизонтальные компоненты вектора скорости и давление на поверхности океана и 5 бароклинные переменные для каждого из 21 выделенных уровней плотности – горизонтальные компоненты вектора скорости, толщина слоя, температура и соленость. Следовательно, размерность вектора состояния модели  $X$  составляет  $r = 480 \times 760 \times 109 = 39763200$ . Наблюдаемой информации в данных экспериментах были только данные по аномалии уровня океана, взятые из архива AVISO.



Данные наблюдались и записывались ежедневно в течение 8 лет, в 2002–2009 гг. Данных наблюдения за день было порядка  $N = 25000$ – $30000$ . Архив располагает также значениями наблюдений за уровнем вдоль треков.

Перед проведением численных экспериментов по усвоению данных требуется выполнить ряд предварительных действий. Поскольку модель предполагается несмещенной относительно наблюдений, реально существующая средняя невязка (разность) между моделью и наблюдениями должна быть удалена или хотя бы существенно минимизирована. Для этого разработана специальная процедура – стратегия удаления смещения вдоль треков [16]. Модельный расчет вдоль каждого трека и наблюдения усредняются независимо вдоль каждого трека спутника (результаты модельного расчета интерполируются в точки наблюдений), а затем разность между средним наблюдаемым и средним модельным значением на каждом треке вычитается из реально наблюдаемого значения. На предварительной стадии значения наблюдений также сглаживаются с помощью скользящего среднего, поскольку они производятся с дискретностью около 5 км, а сетка имеет разрешение около 25 км. Кроме того, отбраковываются недостоверные наблюдаемые значения, а также те значения, что лежат вне рассматриваемой области. Все это позволяет снизить количество используемых наблюдаемых значений на порядок, и реальная размерность  $N$  становится порядка 3000 ежедневно.

Задание вектора  $C$  и ковариационной матрицы  $Q$  также частично производится на предварительном этапе. Для каждой точки сетки в горизонтальной плоскости проводится круг радиуса  $0.25^\circ$ , затем все попавшие в этот круг наблюдения усредняются, и это среднее приписывается к данной точке сетки. Значения вектора  $C$  в этой точке будет равно этому значению минус модельное значение с усвоением на предыдущем шаге по времени. Если ни одной точки наблюдений в круг не попало, значение вектора  $C$  в этой точке совпадает с модельным. Значения векторов  $HF$ ,  $HL$  определяются аналогично. Процедура задания матрицы  $Q$  более сложная. Эта процедура задается так называемой «аномальной стратегией», характерной для метода усвоения по схеме ансамблевой интерполяции (EnOI). Сначала проводится расчет на временном интервале в 40 лет с внешними граничными условиями, ветром, потоками тепла и влаги, заданными из атласа NCEP [21]. В этом расчете записываются данные за последние 10 лет на каждый день, затем берется их среднее значение за 10 лет и отклонение расчетного значения за конкретный день от найденного среднего (аномалия  $\eta$ ). Эта аномалия интерполируется в точку наблюдений по той же схеме, что и для расчета вектора  $C$ , то есть усредняются все значения аномалий в точках сетки, находящиеся в круге радиуса  $0.25^\circ$  вокруг каждой из точек наблюдений, и среднее значение приписывается этой точке наблюдения. То же делается и для вектора состояния  $x$ . Затем ковариация  $Q$  вычисляется как

$$Q = \frac{1}{N_{ens}} \sum_{i=1}^{N_{ens}} (\eta_i - x)(\eta_i - x)' + R,$$

где  $N_{ens}$  – заданное число членов ансамбля, в экспериментах выбрано  $N_{ens} = 50$ . О матрице  $R$  было сказано выше, на диагонали этой матрицы выбирались значения  $\delta_{jj} = 0.01 \text{ м}^2$ ,  $j=1, \dots, N$ , как рекомендовано в [22]. Чтобы усвоить данные на конкретный день, члены ансамбля выбираются вокруг этой даты за 5 дней. Например, если усвоение производится 7 апреля, то значения ансамбля задаются 1,4,7,10,13 апреля за эти 10 лет, всего 50

значений. По этой конструкции  $Q$  будет  $N \times N$  симметричной матрицей и, как предполагалось выше, обратимой.

Следует отметить, что схема задания матрицы  $Q$  аналогична заданию матрицы  $HBH'$ , где  $B$  – так называемая «background covariance matrix», используемая в теории калмановского фильтра [10]. Однако в данном случае  $Q$  вычисляется зависимой от вектора состояния  $x$  на предыдущем шаге.

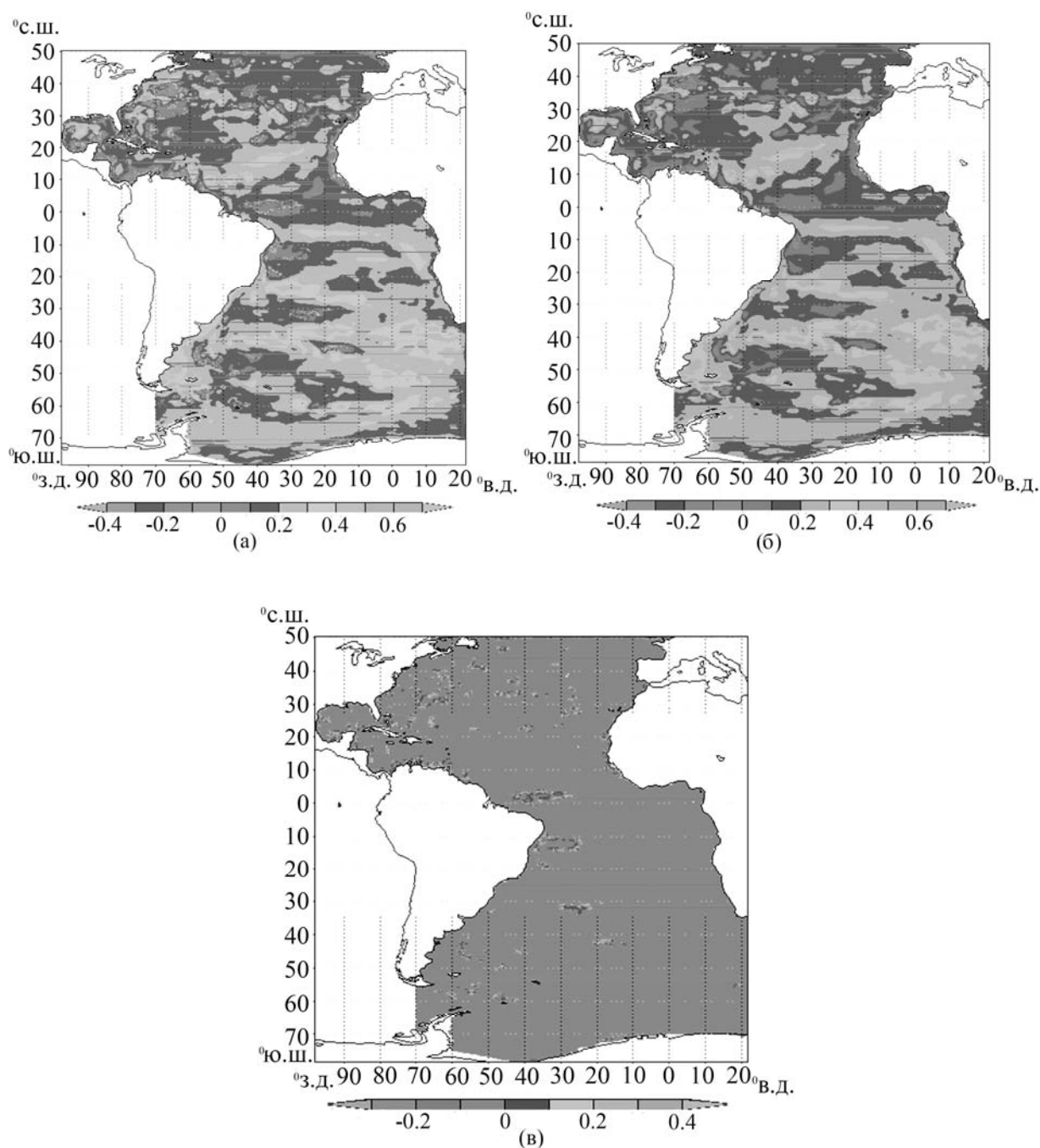
С применением разработанного метода усвоения были выполнены численные эксперименты по усвоению данных в модели NUCOM. Эксперименты проводились на временном отрезке 15 дней  $[0, T] = [01.04.2011, 15.04.2011]$  с шагом  $\Delta t = 1$  день, с усвоением данных на каждом шаге по формулам (3), (11) с определением векторов  $\Lambda$ ,  $C$ ,  $HF$ ,  $HA$  и матрицы  $Q$  описанным выше способом.

Для анализа полученных результатов можно рассмотреть карты полей аномалий уровня океана (SSHA), полученных до и после усвоения. На рис.1а-в приводятся поле после усвоения (анализ), поле до усвоения (background) и их разность на 15 сутки (последний день усвоения) соответственно. На рис.2 приводится карта поля SSHA, выполненная в параллельном эксперименте по модели без усвоения (контрольный расчет) на этот же день. На рис.1а хорошо видна вихревая мезомасштабная структура поля SSHA, особенно ярко выраженная в северной части расчетной области, в зоне Гольфстрима, а также в районе пролива Дрейка и зоне Бразильско–Мальвинского столкновения в южной части Атлантики. При этом значения аномалий по амплитуде достигают 0.6 м, что представляется очень большой величиной в синоптическом масштабе. На рис.1б в целом структура полей сходна со структурой поля, приведенного на рис.1а, но амплитуды полей меньше, сама по себе вихревая мезомасштабная динамика выражена слабее. Особенно хорошо это видно на рис.1в, где приведена разность этих полей (анализ – background). В северной и южной частях Атлантики хорошо выражены вихри, с амплитудой до 0.3 м, причем как положительной, так и отрицательной динамики. Отсюда можно сделать вывод, что при усвоении данных синоптическая и мезомасштабная структура полей SSHA сохраняется и даже усиливается, а в модели без усвоения она сглаживается. Этот вывод подтверждается полученным в параллельном расчете полем SSHA в контрольном эксперименте (рис.2). Показанное на нем поле SSHA содержит заметно меньше вихрей синоптического и мезо- масштаба, их амплитуда также существенно меньше тех, которые видны на рис.1. Исключение составляют ярко выраженные вихри в районе Гольфстрима, которые хорошо получаются во всех приведенных расчетах.

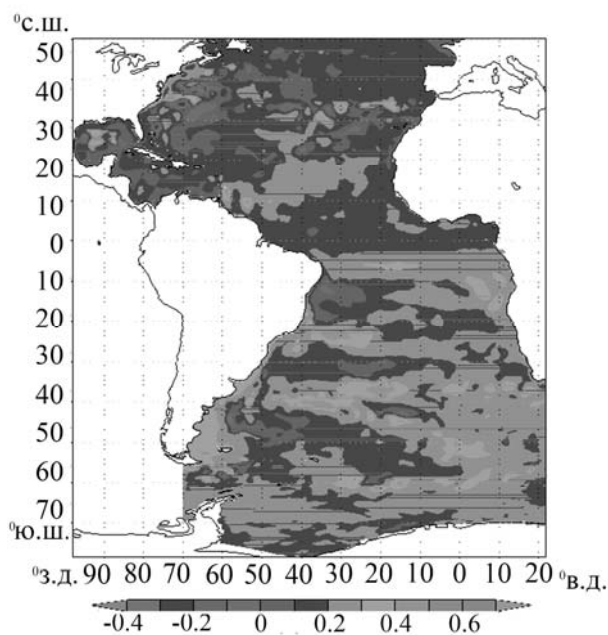
На рис.3 приведено поле SSHA на 15 апреля 2011 г. Данное поле получено при копировании непосредственно данных с сайта [www.aviso.altimetry.fr](http://www.aviso.altimetry.fr) в NetCDF формате и их последующей визуализацией с помощью графического пакета FERRET. Поэтому область, показанная на рис.3, не идентична области модели (рис.1, 2). Кроме того, количественное сравнение этих полей (модельного и наблюдаемого) сделать сложно, так как сетки не совпадают, а при интерполяции появится дополнительная и трудно учитываемая ошибка. Однако качественное сравнение сделать можно.

На рис.3 очень хорошо видно, что наблюдаемое поле в экваториальной области Атлантики однородно, а в северной и южной частях Атлантики имеет ярко выраженную вихревую структуру. Размер вихрей по амплитуде совпадает или очень близок к полученному в результате усвоения полю SSHA. Есть еще одна деталь – в экваториальной области выражена отрицательная аномалия – «язык» вдоль экватора, амплитудой поряд-

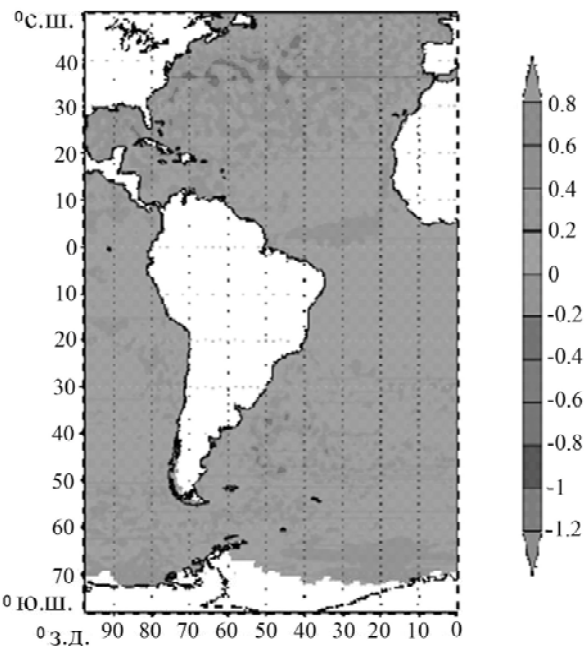
ка 0.1 м, которая видна в поле анализа (рис. 1а) и совсем не видна в контрольном поле, то есть сама по себе модель его не воспроизводит. В поле до усвоения эта аномалия присутствует, но по амплитуде не совпадает с наблюдениями. То есть можно сделать вывод, что при усвоении коррекция осуществляется как качественно, так и количественно правильно.



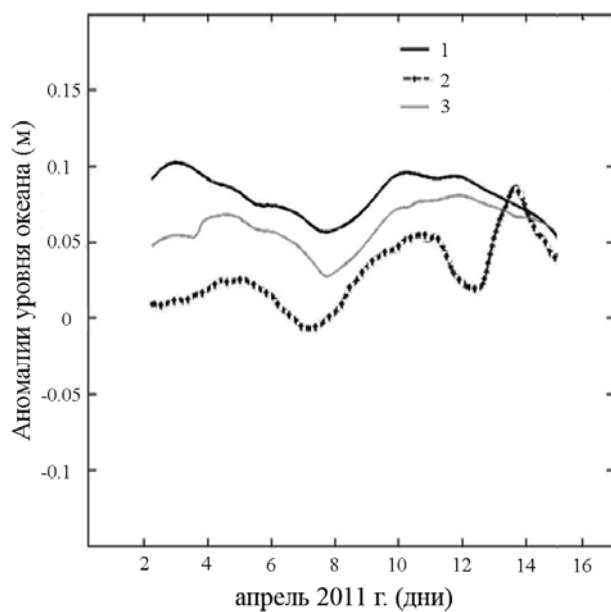
**Рис.1.** Поля аномалий уровня океана (SSHA) а) после усвоения; б) до усвоения; в) разность на 15 суток (последний день усвоения).



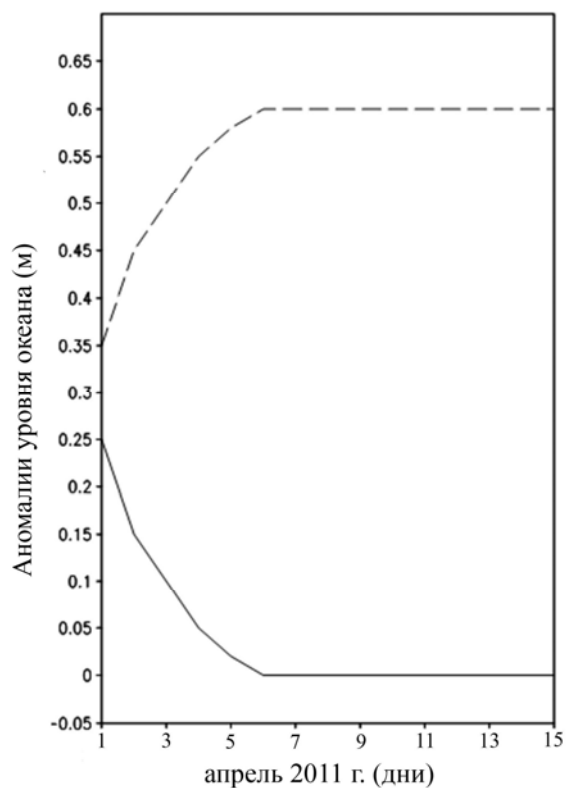
**Рис.2.** Поля аномалий уровня океана (SSHA) – контрольный расчет.



**Рис.3.** Интерполированное и построенное по технологии реанализа наблюдаемое поле (SSHA) на 15 апреля 2011 г.



**Рис.4.** Поведение аномалии уровня океана (SSHA) вдоль одного из треков спутника за время интегрирования модели; кривая 1 – расчет по модели без усвоения, 2 – наблюдаемые значения, 3 – расчет по модели с усвоением.



**Рис.5.** Границы построенного поля анализа SSHA в каждой точке при задании его начальной дисперсии (с 95% уровнем значимости в точке с координатами 40°с.ш., 50° з.д.).

Качество методов усвоения можно проверить по близости усвоенного поля к наблюдениям по сравнению с контрольным полем. Такая методика широко используется как в теории, так и в практических расчетах [1,17]. На рис.4 приводятся 3 кривые, иллюстрирующие поведение аномалии уровня океана вдоль одного из треков спутника за время интегрирования модели: наблюдаемая кривая SSHA показана пунктиром, расчетная SSHA показана толстой сплошной линией и усвоенная SSHA показана тонкой сплошной линией. Можно видеть, что расчетная кривая находится между контрольной и наблюдаемой.

В завершении данного параграфа можно привести оценку достоверности полученной кривой в заданной точке при усвоении. Как показано выше, метод усвоения позволяет рассчитать доверительные границы построенного поля анализа в каждой точке при задании его начальной дисперсии. На рис.5 приведены такие границы с 95% уровнем значимости в точке с координатами  $40^\circ$  с.ш.,  $50^\circ$  з.д. Расчет осуществлялся по уравнению Фоккера-Планка (12) с начальным распределением, которое выбиралось гауссовым с нулевым средним и дисперсией, равной  $0.01 \text{ м}^2$ . Все параметры данного уравнения определялись численно в модели. Численный метод расчета уравнения (12) здесь не приводится, он аналогичен используемому в [17]. На рис.5 видно, что границы достоверности быстро расширяются и становятся практически постоянными, начиная с 6-го дня интегрирования. При этом нижняя граница близка к нулю, а верхняя около 0.6 м, начальная аномалия была равной 0.3 м.

#### 4. Выводы и замечания

В работе теоретически разработан и практически реализован новый метод усвоения данных, основанный на теории диффузионных случайных процессов.

Метод достаточно прост в реализации и позволяет воспроизвести реальную структуру наблюдаемых полей на синоптическом и мезо- масштабах. Показано, что при усвоении данных альтиметрии ошибка моделирования уменьшается, а полученные поля оказываются ближе к наблюдаемым. Показано также, что теоретически и практически возможно построить доверительные границы для искомой ошибки моделирования.

В работе анализируются и усваиваются только поля альтиметрии, а именно поля аномалии уровня поверхности океана. Однако метод позволяет провести полный расчет всех модельных полей до и после усвоения, а также усваивать и другие наблюдаемые величины, в частности – температуру поверхности океана, данные с дрейфтеров АРГО, другие данные. Это материал для будущего исследования.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *M. Ghil, P. Malnotte-Rizzoli.* Data assimilation in meteorology and oceanography // *Adv. Geophys.*, 1991, v.33, p.141-266.
2. *В.В. Пененко.* Методы численного моделирования атмосферных процессов. – Л.: Гидрометеоиздат, 1981, 332 с.;  
*V.V. Penenko.* Methods of numerical modelling of atmospheric processes. – Leningrad, Gidrometeoizdat, 1981, 332 p.
3. *G.I. Marchuk, V.V. Penenko.* Application of perturbation theory to problems of simulation of atmospheric processes, in *Monsoon Dynamics*, Ed. By J. Lighthill and R. Pearce // Cambridge, Cambridge University Press, 1981, p.639–655.

4. *G.I. Marchuk, V.B. Zalesny.* A numerical technique for geophysical data assimilation problems using Pontryagin's principle and splitting-up method // *Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling*, 1993, v.8, № 4, p.311-326.
5. *V.B. Zalesny, A.S. Rusakov.* Numerical algorithm of data assimilation based on splitting and adjoint equation methods // *Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling*, 2007, v.22, №2, p.199-219.
6. *V.P. Shutyaev, E.I. Parmuzin.* Some algorithms for studying solution sensitivity in the problem of variational assimilation of observation data for a model of ocean thermodynamics // *Russian J. Numer. Anal. Math. Modelling*, 2009, v.24, №2, p.145–160.
7. *В.И. Агошков, Е.И. Пармузин, В.П. Шутяев.* Ассимиляция данных наблюдений в задаче циркуляции Черного моря и анализ чувствительности ее решения // *Известия РАН. Физика атмосферы и океана*, 2013, т. 49, № 6, с.643-654;  
англ. пер.: *V.I. Agoshkov, E.I. Parmuzin, V.P. Shutyaev.* Observational data assimilation in the problem of Black Sea circulation and sensitivity analysis of its solution // *Izv. Atmos. Ocean. Phys.*, 2013, v.49, №6, p.592–602.
8. *O. Talagrand, P. Courtier.* Variational assimilation of meteorological observations with the adjoint vorticity equation. I: Theory // *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 1987, v.113, p.1311-1328.
9. *G. Evensen.* Sequential data assimilation with a non-linear quasi-geostrophic model using Monte-Carlo methods to forecast error statistics // *J. Geophys. Res.*, 1994, № 6, p.1014-1062.
10. *G. Evensen.* The ensemble Kalman filter: Theoretical formulation and practical implementation // *Ocean Dyn.*, 2003, v.53, p.343-367.
11. *K. Belyaev, C.A.S. Tanajura, J.J. O'Brien.* A data assimilation technique with an ocean circulation model and its application to the tropical Atlantic // *Appl. Math. Model.*, 2001, v.25, p.655-670.
12. *C.A.S. Tanajura, K. Belyaev.* A sequential data assimilation method based on the properties of diffusion-type process // *Appl. Math. Model.*, 2009, v.33, p.2165-2174.
13. *A.C. Lorenc, N.E. Bowler, A.M. Clayton, S.R. Pring, D. Fairbairn.* Comparison of Hybrid-4DVar and Hybrid-4DVar Data Assimilation Methods for Global NW // *Mon. Wea. Rev.*, 2015, v.143, p.212–229.
14. *R. Bleck, D.B. Boudra.* Initial testing of a numerical ocean circulation model using a hybrid quasi-isopycnal vertical coordinate // *J. Phys. Oceanogr.*, 1981, №11, p.755-770.
15. *R. Bleck.* An oceanic general circulation model framed in hybrid isopycnic-Cartesian coordinates // *Ocean Model.*, 2002, N 4, p.55-88.
16. *C.A.S. Tanajura, L.N. Lima.* Assimilation of sea surface height anomalies into hycom with an optimal interpolation scheme over the Atlantic ocean Metarea V // *Geophys. Bras. J.*, 2013, v.31, p.257-270.
17. *К.П. Беляев, К.А.С. Танажура, Н.П. Тучкова.* Сравнение методов усвоения данных буев "АРГО" в гидродинамической модели океана // *Океанология*, 2012, т.52, №5, с.643-653;  
англ. пер.: *K. Belyaev, C.A.S. Tanajura, N. Tuchkova.* Comparison of Argo drifter data assimilation methods for hydrodynamic models // *Oceanology*, 2012, v.52, №5, p.523-615.
18. *Ф.П. Васильев.* Методы оптимизации. – М.: Факториал, 2002, 823 с.  
*F.P. Vasilev.* Metody optimizatsii. – М.: Faktorial, 2002, 823 p.
19. *W.M. Wonham.* Stochastic problems in optimal control // *IEEE Convention record*, Part 11, 1963, p. 114–124.
20. *E.P. Chassignet, H.E. Hurlburt, E.J. Metzger, O.M. Smedstad, J. Cummings, G.R. Halliwell, R. Bleck, R. Baraille, A.J. Wallcraft, C. Lozano.* US GODAE: Global Ocean Prediction with the Hybrid Coordinate Ocean Model (HYCOM) // *Oceanography*, 2009, v.22, p.64-75.
21. *E. Kalnay et al.* The NCEP/NCAR 40-year reanalysis project // *Bull. Amer. Meteorol. Soc.*, 1996, v.77, p.437-472.
22. *J. Xie, J. Zhu.* Ensemble optimal interpolation schemes for assimilating Argo profiles into a hybrid coordinate ocean model // *Ocean Modelling*, 2010, v.33, p.283-298.